Лекция 7
Параллельное решение СЛАУ методом Гаусса

Курносов Михаил Георгиевич

E-mail: mkurnosov@gmail.com
WWW: www.mkurnosov.net

Курс «Параллельные вычислительные технологии»
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики (г. Новосибирск)
Осенний семестр

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

- Дана система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Ax = b}$$

- Требуется найти решение – неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Решение СЛАУ методом Гаусса

- **Метод Гаусса** (Gaussian elimination, row reduction) – метод последовательного исключения переменных

- **Шаги метода Гаусса:**

1. **Прямой ход** (elimination) – СЛАУ приводится к треугольной форме путем элементарных преобразований (вычислительная сложность $O(n^3)$)

2. **Обратный ход** (back substitution) – начиная с последних, находятся все неизвестные системы (вычислительная сложность $O(n^2)$)

Решение СЛАУ методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

- **Прямой ход метода Гаусса**

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -3 \end{matrix} \quad \overset{x_1}{\rightarrow} \quad \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -2x_2 + x_3 = -1 \\ -3x_2 - 3x_3 = -15 \end{matrix}$$

- умножили первое уравнение на 1 и вычли из второго

- умножили первое уравнение на 1 и вычли из второго

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -2x_2 + x_3 = -1 \\ -3x_2 - 3x_3 = -15 \end{matrix} \quad \overset{x_2}{\rightarrow} \quad \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \\ -\frac{9}{2}x_3 = -\frac{27}{2} \end{matrix}$$

- разделили на -2

- умножили второе уравнение на -3 и вычли из третьего

Решение СЛАУ методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

- **Обратный ход метода Гаусса**

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \\ x_3 = 3 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{matrix}$$

Последовательная реализация метода Гаусса

```
int main(int argc, char *argv[])
{
    int n = 3000;
    double t = wtime();
    double *a = malloc(sizeof(*a) * n * n);  // Матрица коэффициентов
    double *b = malloc(sizeof(*b) * n);      // Столбец свободных членов
    double *x = malloc(sizeof(*x) * n);      // Неизвестные

    for (int i = 0; i < n; i++) {            // Инициализация
        srand(i * (n + 1));
        for (int j = 0; j < n; j++)
            a[i * n + j] = rand() % 100 + 1;
        b[i] = rand() % 100 + 1;
    }

    #if 0
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int j = 0; j < n; j++)
            printf("%12.4f ", a[i * n + j]);
        printf(" | %12.4f\n", b[i]);
    }
    #endif
```

Последовательная реализация метода Гаусса

```
// Прямой ход -- O(n^3)
for (int k = 0; k < n - 1; k++) {
    // Исключение x_i из строк k+1...n-1
    double pivot = a[k * n + k];
    for (int i = k + 1; i < n; i++) {
        // Из уравнения (строки) i вычитается уравнение k
        double lik = a[i * n + k] / pivot;
        for (int j = k; j < n; j++)
            a[i * n + j] -= lik * a[k * n + j];
        b[i] -= lik * b[k];
    }
}

// Обратный ход -- O(n^2)
for (int k = n - 1; k >= 0; k--) {
    x[k] = b[k];
    for (int i = k + 1; i < n; i++)
        x[k] -= a[k * n + i] * x[i];
    x[k] /= a[k * n + k];
}
```

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{15}x_5 = b_1$$
$$a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{25}x_5 = b'_2$$
$$a'_{32}x_2 + \cdots + a'_{35}x_5 = b'_3$$
$$a'_{42}x_2 + \cdots + a'_{45}x_5 = b'_4$$
$$a'_{52}x_2 + \cdots + a'_{55}x_5 = b'_5$$

$$x_1 = \frac{b'_1 - a'_{12}x_2 - a'_{13}x_3 - a'_{14}x_4 - a'_{15}x_5}{a'_{11}}$$
$$x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23}x_3 - a'_{24}x_4 - a'_{25}x_5}{a'_{22}}$$
$$x_3 = \frac{b'_3 - a'_{34}x_4 - a'_{35}x_5}{a'_{33}}$$
$$x_4 = \frac{b'_4 - a'_{45}x_5}{a'_{44}}$$
$$\boldsymbol{x_5 = \frac{b'_5}{a'_{55}}}$$

Последовательная реализация метода Гаусса

```
// ОТЛАДКА: Сравнение результатов с GNU Scientifi Library (GSL) -- #include <gsl/gsl_linalg.h>
for (int i = 0; i < n; i++) {
    srand(i * (n + 1));
    for (int j = 0; j < n; j++)
        a[i * n + j] = rand() % 100 + 1;
    b[i] = rand() % 100 + 1;
}

gsl_matrix_view gsl_a = gsl_matrix_view_array(a, n, n);
gsl_vector_view gsl_b = gsl_vector_view_array(b, n);
gsl_vector *gsl_x = gsl_vector_alloc(n);
int s;
gsl_permutation *p = gsl_permutation_alloc(n);
gsl_linalg_LU_decomp(&gsl_a.matrix, p, &s);
gsl_linalg_LU_solve(&gsl_a.matrix, p, &gsl_b.vector, gsl_x);

printf ("GSL X[%d]: ", n);
for (int i = 0; i < n; i++)
    printf("%f ", gsl_vector_get(gsl_x, i));
printf("\n");
```

```
$ gcc …   -lgsl -lgslcblas -lm
```

Последовательная реализация метода Гаусса

```
    // Сравнение векторов
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        if (fabs(x[i] - gsl_vector_get(gsl_x, i)) > 0.0001) {
            fprintf(stderr, "Invalid result: elem %d: %f %f\n", i, x[i], gsl_vector_get(gsl_x, i));
            break;
        }
    }
    gsl_permutation_free(p);
    gsl_vector_free(gsl_x);
#endif

    free(b);
    free(a);
    t = wtime() - t;
    printf("Gaussian Elimination (serial): n %d, time (sec) %.6f\n", n, t);
#if 0
    printf("X[%d]:     ", n);
    for (int i = 0; i < n; i++)
        printf("%f ", x[i]);
    printf("\n");
#endif
    free(x);
    return 0;
}
```

Параллельный метод Гаусса
Версия 1

- Каждый процесс хранит в своей памяти одну строку матрицы – одно уравнение
- Требуется *n* процессов

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{15}x_5 = b_1$ Процесс 0

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{25}x_5 = b_2$ Процесс 1

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{35}x_5 = b_3$ Процесс 2

$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \cdots + a_{45}x_5 = b_4$ Процесс 3

$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + \cdots + a_{55}x_5 = b_5$ Процесс 4

Прямой ход

- Процесс 0 передает свою строку 1 всем
- Процессы 1..*P*-1 исключают x_1 из своих уравнений
- Процесс 1 передает свою строку 2 всем
- Процессы 2..*P*-1 исключают x_2 из своих уравнений
- …
- Процесс *P*-2 передает свою строку *n*-1 всем
- Процесс *P*-1 исключают x_{n-1} из своего уравнения

Обратный ход

- Процесс *P*-1 вычисляет x_n и передает всем
- Процесс *P*-2 вычисляет x_{n-1} и передает всем
- …
- Процесс 1 вычисляет x_2 и передает всем
- Процесс 1 вычисляет x_1 и передает всем

Параллельный метод Гаусса
Версия 1

- Каждый процесс хранит в своей памяти одну строку матрицы – одно уравнение
- Требуется *n* процессов

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{15}x_5 = b_1 \quad \text{Процесс 0}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{25}x_5 = b_2 \quad \text{Процесс 1}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{35}x_5 = b_3 \quad \text{Процесс 2}$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \cdots + a_{45}x_5 = b_4 \quad \text{Процесс 3}$$

$$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + \cdots + a_{55}x_5 = b_5 \quad \text{Процесс 5}$$

Процессы неравномерно загружены вычислениями – после передачи строки они выбывают из вычислений

Прямой ход

- Процесс 0 передает свою строку 1 всем
- Процессы 1..*P*-1 исключают x_1 из своих уравнений
- Процесс 1 передает свою строку 2 всем
- Процессы 2..*P*-1 исключают x_2 из своих уравнений
- …
- Процесс *P*-2 передает свою строку *n*-1 всем
- Процесс *P*-1 исключают x_{n-1} из своего уравнения

Обратный ход

- Процесс *P*-1 вычисляет x_n и передает всем
- Процесс *P*-2 вычисляет x_{n-1} и передает всем
- …
- Процесс 1 вычисляет x_2 и передает всем
- Процесс 1 вычисляет x_1 и передает всем

Параллельный метод Гаусса
Версия 2

- Каждый процесс хранит в своей памяти горизонтальную полосу из *n* / *P* смежных строк
- Требуется *P* процессов

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{15}x_5 = b_1$ Процесс 0

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{25}x_5 = b_2$ Процесс 0

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{35}x_5 = b_3$ Процесс 1

$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \cdots + a_{45}x_5 = b_4$ Процесс 1

$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + \cdots + a_{55}x_5 = b_5$ Процесс 2

Схема прямого и обратного ходов такая же, как в версии 1

Процессы неравномерно загружены вычислениями – после передачи строки они выбывают из вычислений

Параллельный метод Гаусса
Версия 3 – циклическое распределение строк матрицы

- Каждый процесс хранит в своей памяти порядка *n* / *P* строк, векторы *b*[*n*] и *x*[*n*]
- Строки распределены по циклической схеме для выравнивания вычислительной загрузки процессов

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{15}x_5 = b_1$ Процесс 0

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{25}x_5 = b_2$ Процесс 1

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{35}x_5 = b_3$ Процесс 2

$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \cdots + a_{45}x_5 = b_4$ Процесс 0

$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + \cdots + a_{55}x_5 = b_5$ Процесс 1

Параллельный метод Гаусса

Устранение x_1 (процесс, содержащий строку 1 рассылает её)

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{15}x_5 = b_1$ **Процесс 0 рассылает строку 1**

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{25}x_5 = b_2$ Процесс 1: вычитает принятую строку 1 из своей строки

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{35}x_5 = b_3$ Процесс 2: вычитает принятую строку 1 из своей строки

$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \cdots + a_{45}x_5 = b_4$ Процесс 0: вычитает принятую строку 1 из своей строки

$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + \cdots + a_{55}x_5 = b_5$ Процесс 1: вычитает принятую строку 1 из своей строки

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{15}x_5 = b_1$ **Процесс 0 рассылает строку 1**

$a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{25}x_5 = b'_2$ Процесс 1: вычитает принятую строку 1 из своей строки

$a'_{32}x_2 + \cdots + a'_{35}x_5 = b'_3$ Процесс 2: вычитает принятую строку 1 из своей строки

$a'_{42}x_2 + \cdots + a'_{45}x_5 = b'_4$ Процесс 0: вычитает принятую строку 1 из своей строки

$a'_{52}x_2 + \cdots + a'_{55}x_5 = b'_5$ Процесс 1: вычитает принятую строку 1 из своей строки

Параллельный метод Гаусса

Устранение x_2 (процесс, содержащий строку 2 рассылает её)

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{15}x_5 = b_1$ Процесс 0: строка не изменяется

$a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{25}x_5 = b'_2$ **Процесс 1: рассылает строку 2**

$a'_{32}x_2 + \cdots + a'_{35}x_5 = b'_3$ Процесс 2: вычитает принятую строку 2 из своей строки

$a'_{42}x_2 + \cdots + a'_{45}x_5 = b'_4$ Процесс 0: вычитает принятую строку 2 из своей строки

$a'_{52}x_2 + \cdots + a'_{55}x_5 = b'_5$ Процесс 1: вычитает принятую строку 2 из своей строки

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{15}x_5 = b_1$ Процесс 0: строка не изменяется

$a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{25}x_5 = b'_2$ **Процесс 1: рассылает строку 2**

$a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{35}x_5 = b'_3$ Процесс 2: вычитает принятую строку 2 из своей строки

$a'_{43}x_3 + \cdots + a'_{45}x_5 = b'_4$ Процесс 0: вычитает принятую строку 2 из своей строки

$a'_{53}x_3 + \cdots + a'_{55}x_5 = b'_5$ Процесс 1: вычитает принятую строку 2 из своей строки

Параллельный метод Гаусса

Устранение x_3 (процесс, содержащий строку 3 рассылает её)

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{15}x_5 = b_1$ Процесс 0: строка не изменяется

$a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{25}x_5 = b'_2$ Процесс 1: строка не изменяется

$a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{35}x_5 = b'_3$ **Процесс 2: рассылает строку 3**

$a'_{43}x_3 + \cdots + a'_{45}x_5 = b'_4$ Процесс 0: вычитает принятую строку 3 из своей строки

$a'_{53}x_3 + \cdots + a'_{55}x_5 = b'_5$ Процесс 1: вычитает принятую строку 3 из своей строки

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{15}x_5 = b_1$ Процесс 0: строка не изменяется

$a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{25}x_5 = b'_2$ Процесс 1: строка не изменяется

$a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{35}x_5 = b'_3$ **Процесс 2: рассылает строку 3**

$a'_{44}x_4 + a'_{45}x_5 = b'_4$ Процесс 0: вычитает принятую строку 3 из своей строки

$a'_{54}x_4 + a'_{55}x_5 = b'_5$ Процесс 1: вычитает принятую строку 3 из своей строки

Параллельный метод Гаусса

Устранение x_4 (процесс, содержащий строку 4 рассылает её)

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{15}x_5 = b_1$ Процесс 0: строка не изменяется

$a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{25}x_5 = b'_2$ Процесс 1: строка не изменяется

$a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{35}x_5 = b'_3$ Процесс 2: строка не изменяется

$a'_{44}x_4 + a'_{45}x_5 = b'_4$ **Процесс 0: рассылает строку 4**

$a'_{54}x_4 + a'_{55}x_5 = b'_5$ Процесс 1: вычитает принятую строку 4 из своей строки

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{15}x_5 = b_1$ Процесс 0: строка не изменяется

$a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{25}x_5 = b'_2$ Процесс 1: строка не изменяется

$a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{35}x_5 = b'_3$ Процесс 2: строка не изменяется

$a'_{44}x_4 + a'_{45}x_5 = b'_4$ **Процесс 0: рассылает строку 4**

$a'_{55}x_5 = b'_5$ Процесс 1: вычитает принятую строку 4 из своей строки

Параллельный метод Гаусса

Обратный ход – инициализация x_i

Каждый процесс инициализирует x[i] значениями b[i], хранящимися в его памяти

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{15}x_5 = b_1$$ Процесс 0: $x_1 = b'_1$, $x_{2\text{-}5} = 0$

$$a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{25}x_5 = b'_2$$ Процесс 1: $x_2 = b'_2$, $x_{1,3\text{-}5} = 0$

$$a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{35}x_5 = b'_3$$ Процесс 2: $x_3 = b'_3$, $x_{1\text{-}2,3\text{-}5} = 0$

$$a'_{44}x_4 + a'_{45}x_5 = b'_4$$ Процесс 0: $x_4 = b'_4$, $x_{1\text{-}3,5} = 0$

$$a'_{55}x_5 = b'_5$$ Процесс 1: $x_5 = b'_5$, $x_{1\text{-}4} = 0$

Параллельный метод Гаусса

Обратный ход – инициализация x_i

Каждый процесс инициализирует x[i] значениями b[i], хранящимися в его памяти

$$x_1 = \frac{b'_1 - a'_{12}x_2 - a'_{13}x_3 - a'_{14}x_4 - a'_{15}x_5}{a'_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23}x_3 - a'_{24}x_4 - a'_{25}x_5}{a'_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b'_3 - a'_{34}x_4 - a'_{35}x_5}{a'_{33}}$$

$$x_4 = \frac{b'_4 - a'_{45}x_5}{a'_{44}}$$

$$x_5 = \frac{b'_5}{a'_{55}}$$

Процесс 0: $x_1 = b'_1$, $x_{2\text{-}5} = 0$

Процесс 1: $x_2 = b'_2$, $x_{1,3\text{-}5} = 0$

Процесс 2: $x_3 = b'_3$, $x_{1\text{-}2,3\text{-}5} = 0$

Процесс 0: $x_4 = b'_4$, $x_{1\text{-}3,5} = 0$

Процесс 1: $x_5 = b'_5$, $x_{1\text{-}4} = 0$

Параллельный метод Гаусса

Обратный ход – вычисление x_5

$$x_1 = \frac{b'_1 - a'_{12}x_2 - a'_{13}x_3 - a'_{14}x_4 - a'_{15}x_5}{a'_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23}x_3 - a'_{24}x_4 - a'_{25}x_5}{a'_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b'_3 - a'_{34}x_4 - a'_{35}x_5}{a'_{33}}$$

$$x_4 = \frac{b'_4 - a'_{45}x_5}{a'_{44}}$$

$$\boldsymbol{x_5 = \frac{b'_5}{a'_{55}}}$$

Процесс 0: $x_1 = b'_1 - a'_{15}x_5$

Процесс 1: $x_2 = b'_2 - a'_{25}x_5$

Процесс 2: $x_3 = b'_3 - a'_{35}x_5$

Процесс 0: $x_4 = b'_4 - a'_{45}x_5$

Процесс 1: рассылает x_5

Параллельный метод Гаусса

Обратный ход – вычисление x_4

$$x_1 = \frac{b'_1 - a'_{12}x_2 - a'_{13}x_3 - a'_{14}x_4 - a'_{15}x_5}{a'_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23}x_3 - a'_{24}x_4 - a'_{25}x_5}{a'_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b'_3 - a'_{34}x_4 - a'_{35}x_5}{a'_{33}}$$

$$x_4 = \frac{b'_4 - a'_{45}x_5}{a'_{44}}$$

$$x_5 = \frac{b'_5}{a'_{55}}$$

Процесс 0: $x_1 = b'_1 - a'_{15}x_5 - a'_{14}x_4$

Процесс 1: $x_2 = b'_2 - a'_{25}x_5 - a'_{24}x_4$

Процесс 2: $x_3 = b'_3 - a'_{35}x_5 - a'_{34}x_4$

Процесс 0: рассылает x_4

Процесс 1: значение x_5 найдено

Параллельный метод Гаусса

Обратный ход – вычисление x_3

$$x_1 = \frac{b'_1 - a'_{12}x_2 - a'_{13}x_3 - a'_{14}x_4 - a'_{15}x_5}{a'_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23}x_3 - a'_{24}x_4 - a'_{25}x_5}{a'_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b'_3 - a'_{34}x_4 - a'_{35}x_5}{a'_{33}}$$

$$x_4 = \frac{b'_4 - a'_{45}x_5}{a'_{44}}$$

$$x_5 = \frac{b'_5}{a'_{55}}$$

Процесс 0: $x_1 = b'_1 - a'_{15}x_5 - a'_{14}x_4 - a'_{13}x_3$

Процесс 1: $x_2 = b'_2 - a'_{25}x_5 - a'_{24}x_4 - a'_{23}x_3$

Процесс 2: рассылает x_3

Процесс 0: значение x_4 найдено

Процесс 1: значение x_5 найдено

Параллельный метод Гаусса

Обратный ход – вычисление x_2

$$x_1 = \frac{b'_1 - a'_{12}x_2 - a'_{13}x_3 - a'_{14}x_4 - a'_{15}x_5}{a'_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23}x_3 - a'_{24}x_4 - a'_{25}x_5}{a'_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b'_3 - a'_{34}x_4 - a'_{35}x_5}{a'_{33}}$$

$$x_4 = \frac{b'_4 - a'_{45}x_5}{a'_{44}}$$

$$x_5 = \frac{b'_5}{a'_{55}}$$

Процесс 0: $x_1 = b'_1 - a'_{15}x_5 - a'_{14}x_4 - a'_{13}x_3 - a'_{12}x_2$

Процесс 1: рассылает x_2

Процесс 2: значение x_3 найдено

Процесс 0: значение x_4 найдено

Процесс 1: значение x_5 найдено

Параллельный метод Гаусса

Обратный ход – вычисление x_1

$$x_1 = \frac{b'_1 - a'_{12}x_2 - a'_{13}x_3 - a'_{14}x_4 - a'_{15}x_5}{a'_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23}x_3 - a'_{24}x_4 - a'_{25}x_5}{a'_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b'_3 - a'_{34}x_4 - a'_{35}x_5}{a'_{33}}$$

$$x_4 = \frac{b'_4 - a'_{45}x_5}{a'_{44}}$$

$$x_5 = \frac{b'_5}{a'_{55}}$$

Процесс 0: $x_1 = (b'_1 - a'_{15}x_5 - \cdots - a'_{12}x_2)/a'_{11}$

Процесс 1: значение x_2 найдено

Процесс 2: значение x_3 найдено

Процесс 0: значение x_4 найдено

Процесс 1: значение x_5 найдено

Параллельный метод Гаусса

```
int main(int argc, char *argv[])
{
    int n = 3000;
    int rank, commsize;
    MPI_Init(&argc, &argv);
    double t = MPI_Wtime();
    MPI_Comm_rank(MPI_COMM_WORLD, &rank);
    MPI_Comm_size(MPI_COMM_WORLD, &commsize);

    int nrows = get_chunk(n, commsize, rank);
    int *rows = malloc(sizeof(*rows) * nrows);    // Номера локальных строк

    // Матрица дополнена столбцом для вектора b
    double *a = malloc(sizeof(*a) * nrows * (n + 1));
    double *x = malloc(sizeof(*x) * n);
    double *tmp = malloc(sizeof(*tmp) * (n + 1));
```

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{15}x_5 = b_1$ Процесс 0

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{25}x_5 = b_2$ Процесс 1

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{35}x_5 = b_3$ Процесс 2

$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \cdots + a_{45}x_5 = b_4$ Процесс 0

$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + \cdots + a_{55}x_5 = b_5$ Процесс 1

Процесс 0: rows[2] = {0, 3}
Процесс 1: rows[2] = {1, 4}
Процесс 2: rows[1] = {2}

Параллельный метод Гаусса

```
int get_chunk(int total, int commsize, int rank)
{
    int n = total;
    int q = n / commsize;
    if (n % commsize)
        q++;
    int r = commsize * q - n;

    /* Compute chunk size for the process */
    int chunk = q;
    if (rank >= commsize - r)
        chunk = q - 1;
    return chunk;
}
```

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{15}x_5 = b_1$ Процесс 0

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{25}x_5 = b_2$ Процесс 1

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{35}x_5 = b_3$ Процесс 2

$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \cdots + a_{45}x_5 = b_4$ Процесс 0

$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + \cdots + a_{55}x_5 = b_5$ Процесс 1

get_chunk(5, 3, rank)

Процесс 0: nrows = 2

Процесс 1: nrows = 2

Процесс 2: nrows = 1

Параллельный метод Гаусса

```
    // Инициализация как в последовательной версии
    for (int i = 0; i < nrows; i++) {
        rows[i] = rank + commsize * i;
        srand(rows[i] * (n + 1));
        for (int j = 0; j < n; j++)
            a[i * (n + 1) + j] = rand() % 100 + 1;
        // b[i]
        a[i * (n + 1) + n] = rand() % 100 + 1;
    }

#if 0
    MPI_Recv(NULL, 0, MPI_INT, (rank > 0) ? rank - 1 : MPI_PROC_NULL, 0, MPI_COMM_WORLD,
             MPI_STATUS_IGNORE); // Вывод в порядке: proc 0, 1, 2, … P-1.
    printf("Proc %d: ", rank);
    for (int i = 0; i < nrows; i++)
        printf("%d ", rows[i]);
    printf("\n");
    MPI_Ssend(NULL, 0, MPI_INT, rank != commsize - 1 ? rank + 1 : MPI_PROC_NULL, 0,
              MPI_COMM_WORLD);
#endif
```

Параллельный метод Гаусса

```
// Прямой ход
int row = 0;
for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    // Исключаем x_i
    if (i == rows[row]) {
        // Рассылаем строку i, находящуюся в памяти текущего процесса
        MPI_Bcast(&a[row * (n + 1)], n + 1, MPI_DOUBLE, rank, MPI_COMM_WORLD);
        for (int j = 0; j <= n; j++)
            tmp[j] = a[row * (n + 1) + j];
        row++;
    } else {
        MPI_Bcast(tmp, n + 1, MPI_DOUBLE, i % commsize, MPI_COMM_WORLD);
    }

    // Вычитаем принятую строку из уравнений, хранящихся в текущем процессе
    for (int j = row; j < nrows; j++) {
        double scaling = a[j * (n + 1) + i] / tmp[i];
        for (int k = i; k < n + 1; k++)
            a[j * (n + 1) + k] -= scaling * tmp[k];
    }
}
```

George Em Karniadakis and Robert M. Kirby Ii. ***Parallel Scientific Computing in C++ and MPI***

Параллельный метод Гаусса

```
// Инициализация неизвестных
row = 0;
for (int i = 0; i < n; i++) {
    x[i] = 0;
    if (i == rows[row]) {
        x[i] = a[row * (n + 1) + n];
        row++;
    }
}
```

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{15}x_5 = b_1$$ Процесс 0: $x_1 = b'_1$, $x_{2\text{-}5} = 0$

$$a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{25}x_5 = b'_2$$ Процесс 1: $x_2 = b'_2$, $x_{1,3\text{-}5} = 0$

$$a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{35}x_5 = b'_3$$ Процесс 2: $x_3 = b'_3$, $x_{1\text{-}2,3\text{-}5} = 0$

$$a'_{44}x_4 + a'_{45}x_5 = b'_4$$ Процесс 0: $x_4 = b'_4$, $x_{1\text{-}3,5} = 0$

$$a'_{55}x_5 = b'_5$$ Процесс 1: $x_5 = b'_5$, $x_{1\text{-}4} = 0$

Параллельный метод Гаусса

```
/* Обратный ход */
row = nrows - 1;
for (int i = n - 1; i > 0; i--) {
    if (row >= 0) {
        if (i == rows[row]) {
            x[i] /= a[row * (n + 1) + i];          // Передаем найденное x_i
            MPI_Bcast(&x[i], 1, MPI_DOUBLE, rank, MPI_COMM_WORLD);
            row--;
        } else
            MPI_Bcast(&x[i], 1, MPI_DOUBLE, i % commsize, MPI_COMM_WORLD);
    } else
        MPI_Bcast(&x[i], 1, MPI_DOUBLE, i % commsize, MPI_COMM_WORLD);

    for (int j = 0; j <= row; j++)                  // Корректировка локальных x_i
        x[rows[j]] -= a[j * (n + 1) + i] * x[i];
}

if (rank == 0)
    x[0] /= a[row * (n + 1)];                       // Корректировка x_0
MPI_Bcast(x, 1, MPI_DOUBLE, 0, MPI_COMM_WORLD);
// Все процессы содержат корректный вектор x[n] решений
```

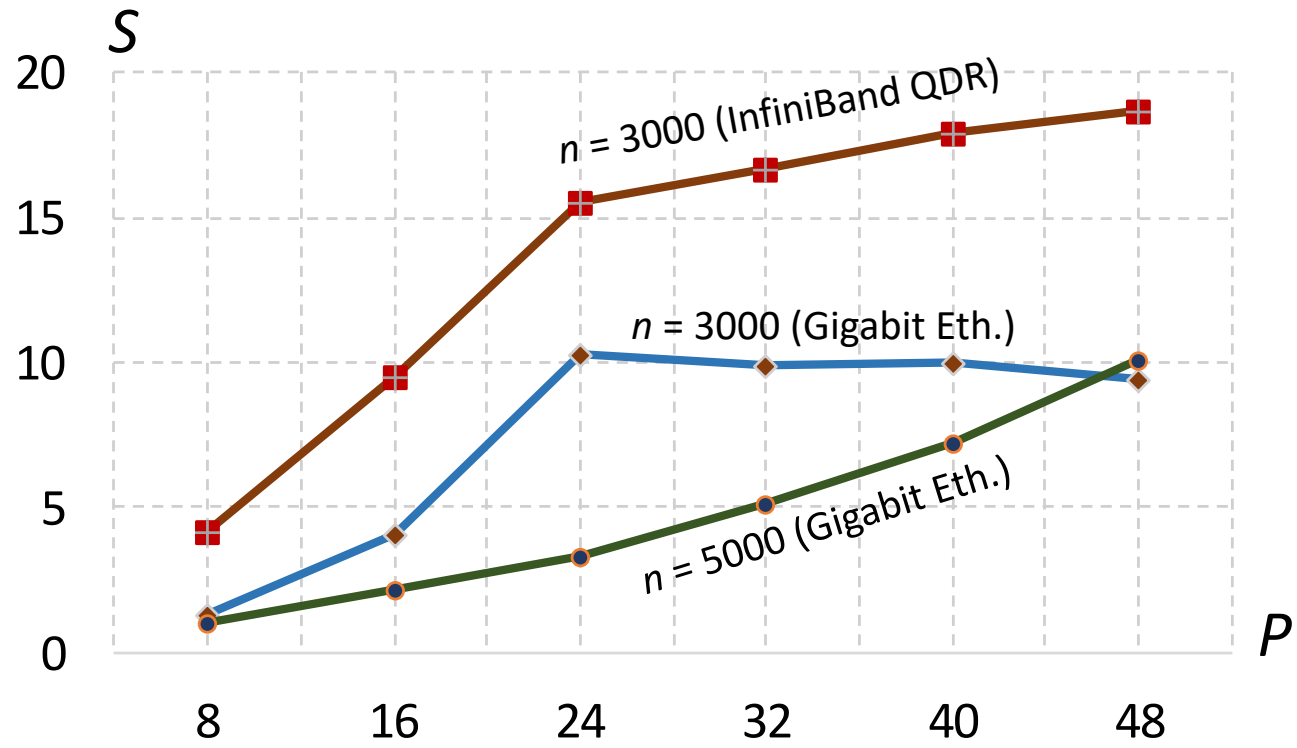
Параллельный метод Гаусса

```
    free(tmp);
    free(rows);
    free(a);
    t = MPI_Wtime() - t;

    if (rank == 0) {
        printf("Gaussian Elimination (MPI): n %d, procs %d, time (sec) %.6f\n",
               n, commsize, t);
        #if 0
        printf("MPI X[%d]: ", n);
        for (int i = 0; i < n; i++)
            printf("%f ", x[i]);
        printf("\n");
        #endif
    }

    free(x);
    MPI_Finalize();
    return 0;
}
```

Анализ эффективности



Зависимость коэффициента *S* ускорения от числа *P* параллельных процессов:
кластеры Jet (Gigabit Ethernet) и Oak (InfiniBand QDR)