Лекция 11
Поиск кратчайшего пути в графе

Курносов Михаил Георгиевич

E-mail: mkurnosov@gmail.com
WWW: www.mkurnosov.net

Курс «Структуры и алгоритмы обработки данных»
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики (Новосибирск)
Весенний семестр, 2016

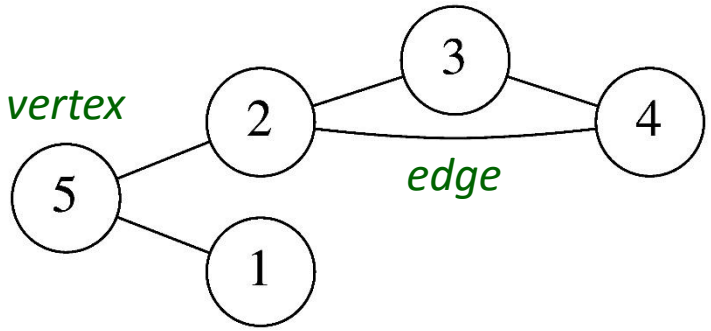
Понятие графа

- **Граф (graph)** – это совокупность непустого множества V вершин и множества E ребер

$$G = (V, E),$$

$$n = |V|, \quad m = |E|,$$

$$V = \{1,2, \dots, n\}, \quad E = \{(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_m, v_m)\}$$



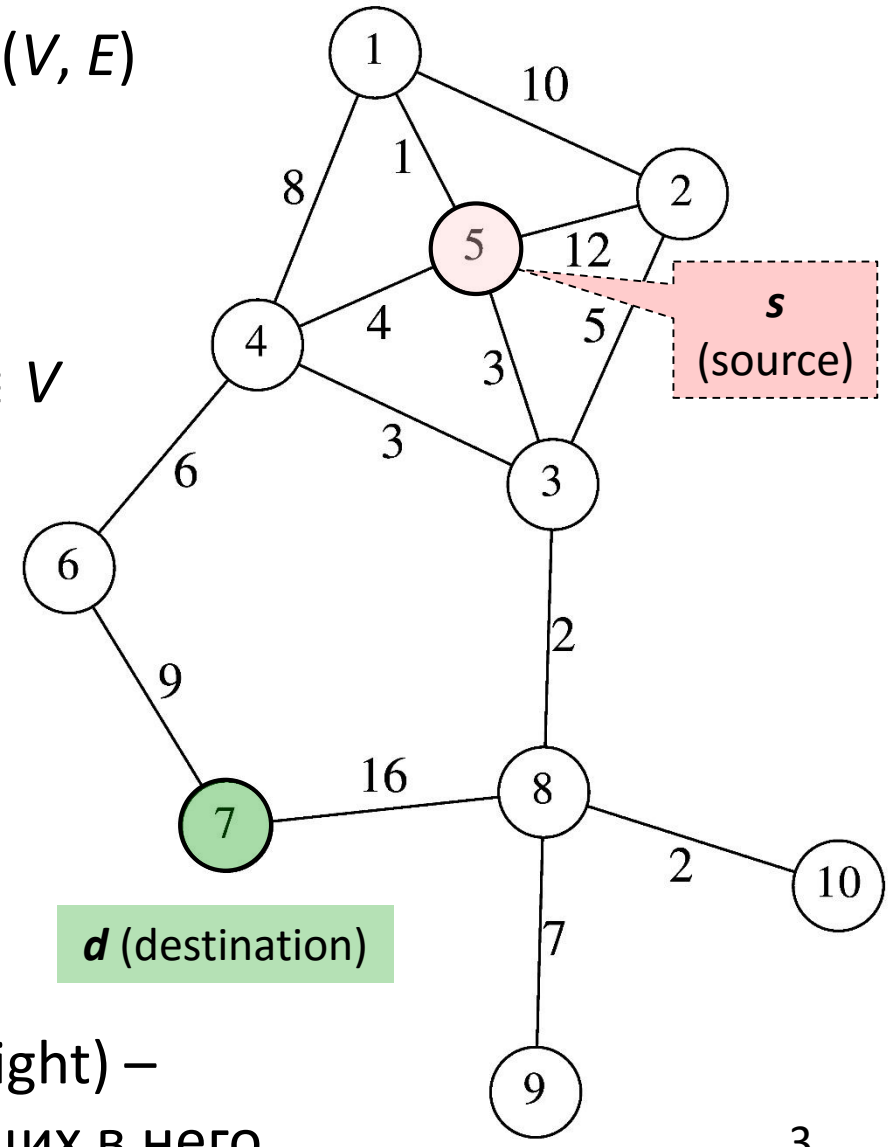
$$\boldsymbol{V = \{1, 2, 3, 4, 5\}}$$

$$\boldsymbol{E = \{(1, 5), (2, 5), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}}$$

(1, 5) и (5, 1) – это одно и тоже ребро

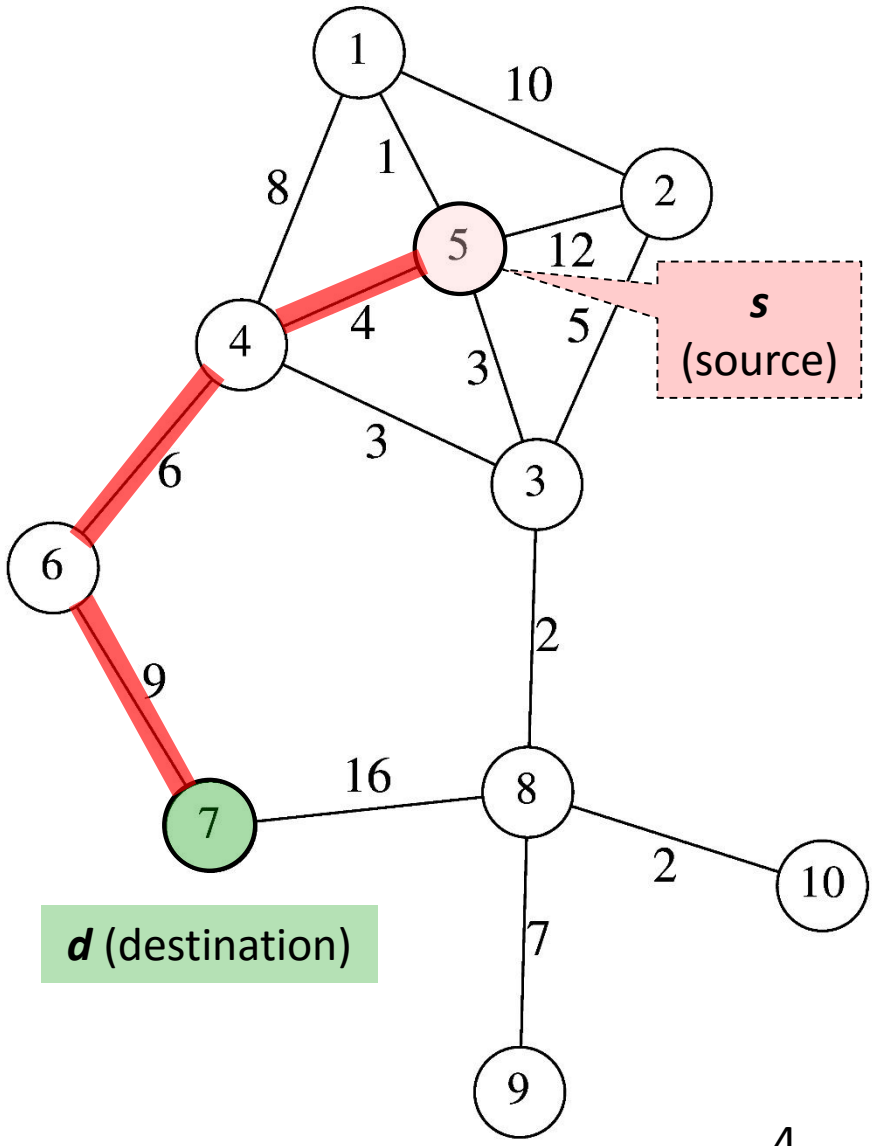
Поиск кратчайшего пути в графе

- **Имеется** взвешенный граф $G = (V, E)$
- Каждому ребру $(i, j) \in E$ назначен вес w_{ij}
- Заданы начальная вершина $s \in V$ и конечная $d \in V$
- **Требуется** найти кратчайший путь из вершины s в вершину d (shortest path problem)
- Длина пути (path length, path cost, path weight) – это сумма весов ребер, входящих в него



Длина пути в графе

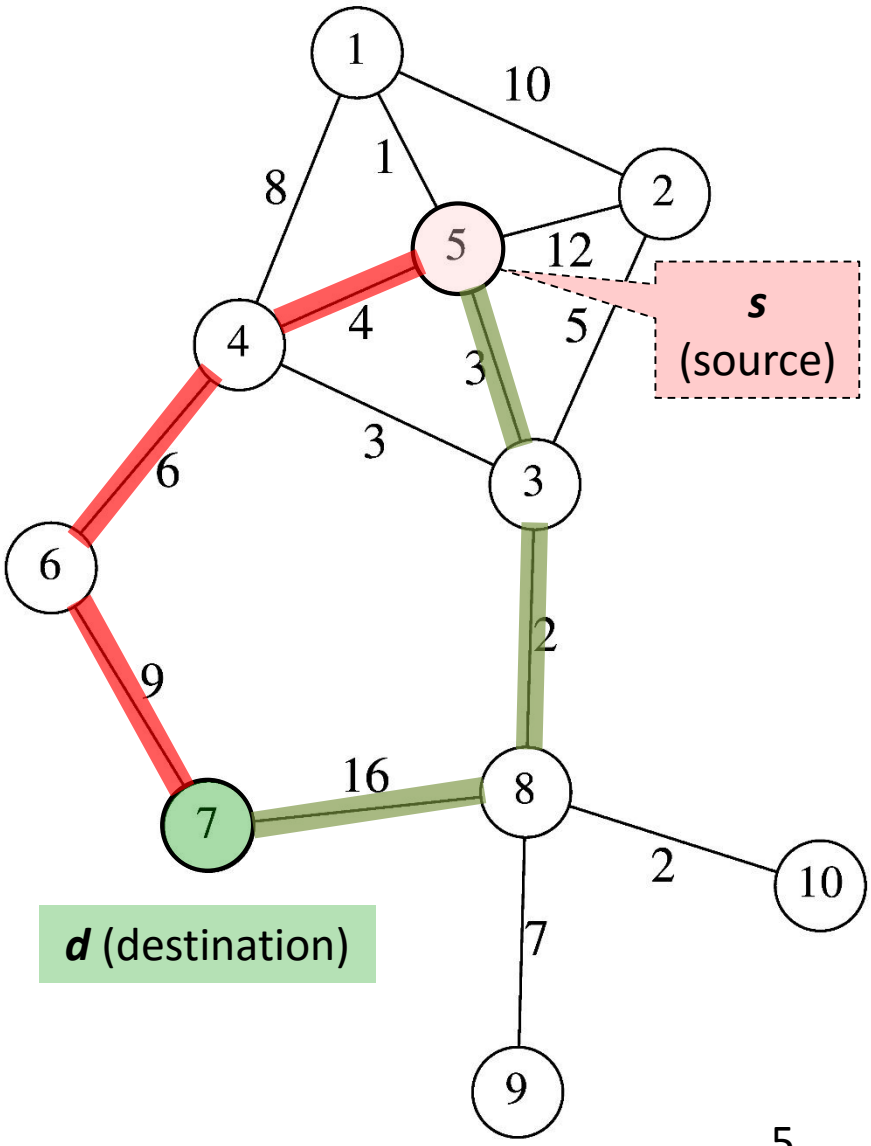
- Длина пути (5, 4, 6, 7) =
  $w_{54} + w_{46} + w_{67} = 4 + 6 + 9 = 19$



Длина пути в графе

- Длина пути (5, 4, 6, 7) =
  $w_{54} + w_{46} + w_{67} = 4 + 6 + 9 = 19$

- Длина пути (5, 3, 8, 7) =
  3 + 2 + 16 = 21

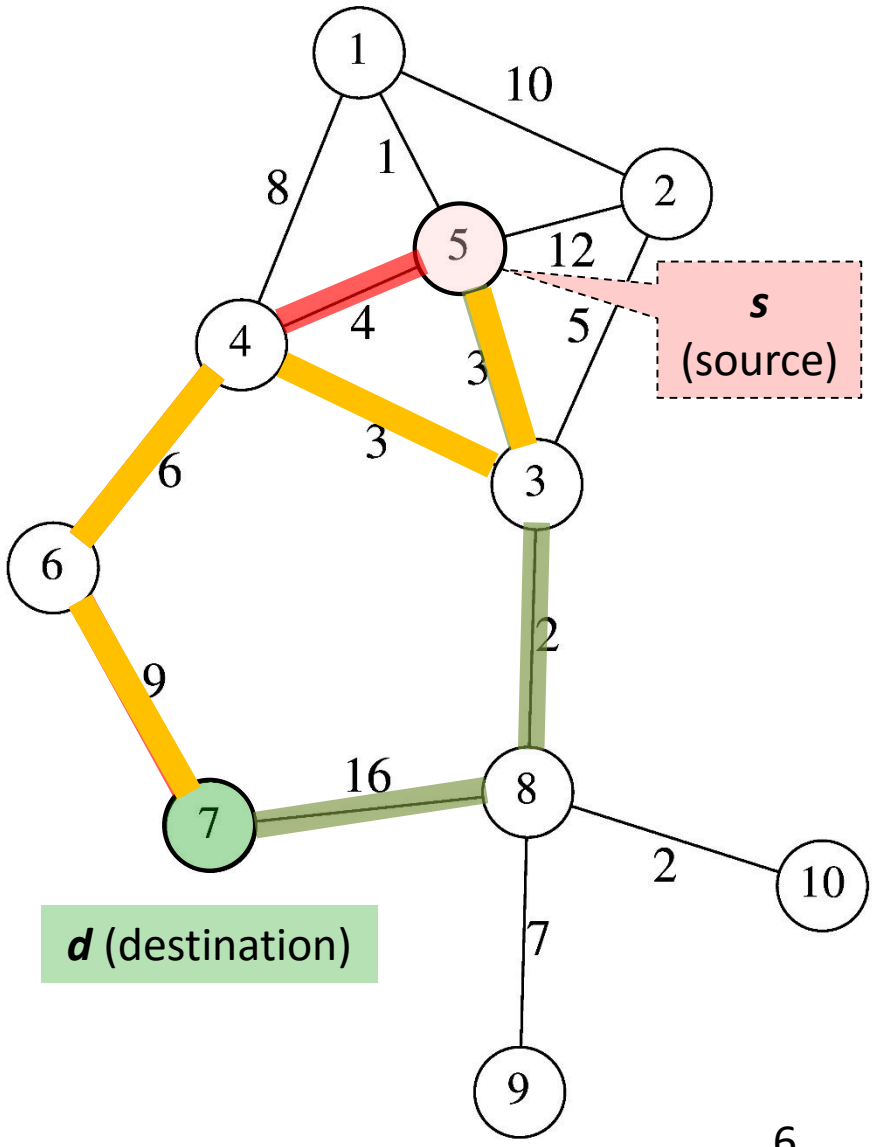


Длина пути в графе

- Длина пути (5, 4, 6, 7) =
  $w_{54} + w_{46} + w_{67} = 4 + 6 + 9 = 19$

- Длина пути (5, 3, 8, 7) =
  3 + 2 + 16 = 21

- Длина пути (5, 3, 4, 6, 7) =
  3 + 3 + 6 + 9 = 21



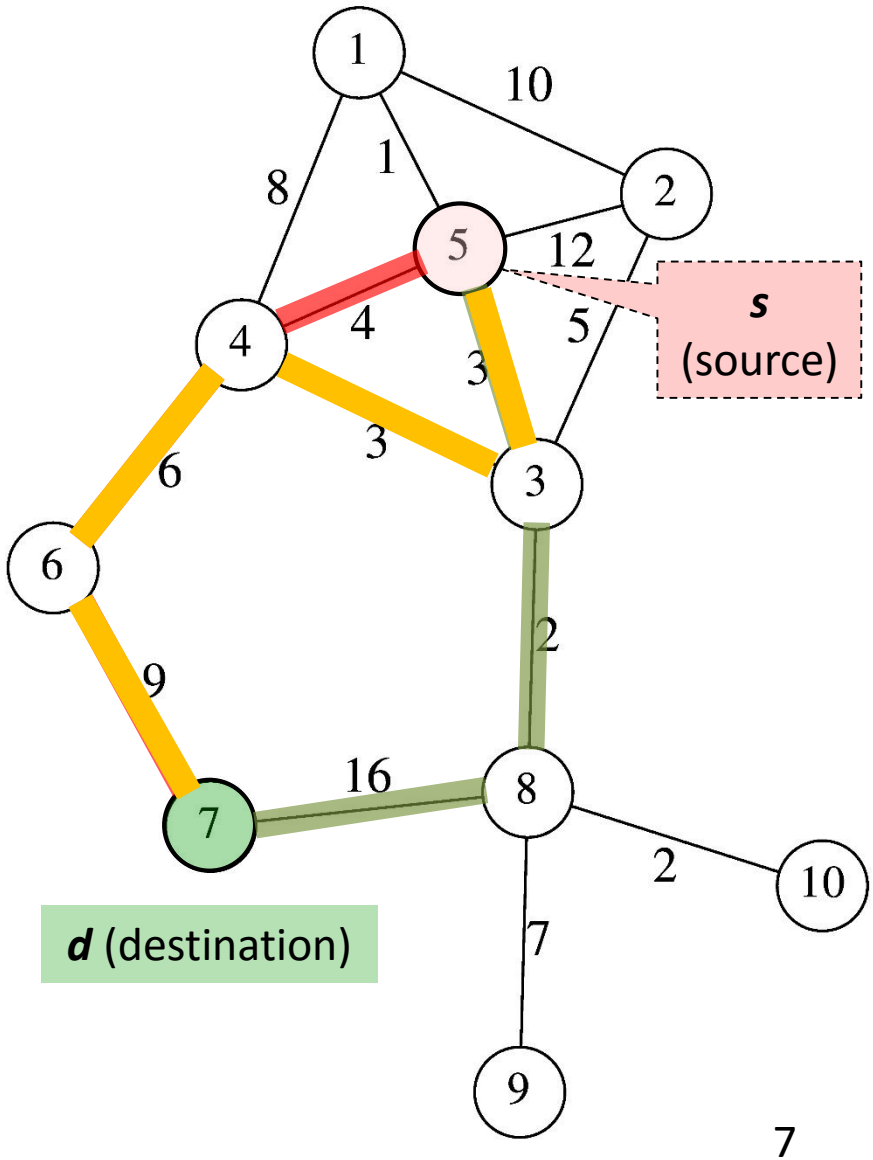
Длина пути в графе

- Длина пути (5, 4, 6, 7) =
  $w_{54} + w_{46} + w_{67} = 4 + 6 + 9 = 19$

- Длина пути (5, 3, 8, 7) =
  3 + 2 + 16 = 21

- Длина пути (5, 3, 4, 6, 7) =
  3 + 3 + 6 + 9 = 21

- **Альтернативные пути**
  - ❑ (5, 1, 4, 3, 8, 7)
  - ❑ (5, 2, 3, 8, 7)
  - ❑ …



Постановки задачи о кратчайшем пути

- **Задача о кратчайшем пути между парой вершин (single-pair shortest path problem)**
  Требуется найти кратчайший путь из заданной вершины *s* в заданную вершину *d*

- **Задача о кратчайших путях из заданной вершины во все (single-source shortest path problem)**
  Найти кратчайшие пути из заданной вершины *s* во все

- **Задача о кратчайшем пути в заданный пункт назначения (single-destination shortest path problem)**
  Требуется найти кратчайшие пути в заданную вершину *v* из всех вершин графа

- **Задача о кратчайшем пути между всеми парами вершин (all-pairs shortest path problem)**
  Требуется найти кратчайший путь из каждой вершины *u* в каждую вершину *v*

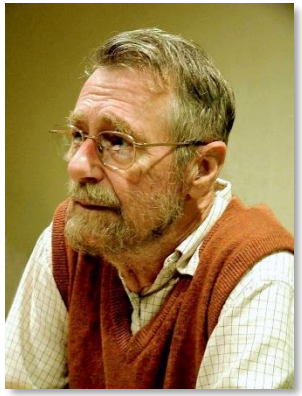
Алгоритмы поиска кратчайшего пути в графе

Алгоритм	Применение
Алгоритм Дейкстры	Находит кратчайший путь от одной из вершин графа до всех остальных. Алгоритм работает только для графов без ребер отрицательного веса ($w_{ij} \geq 0$)
Алгоритм Беллмана-Форда	Находит кратчайшие пути от одной вершины графа до всех остальных во взвешенном графе. Вес ребер может быть отрицательным
Алгоритм поиска A* (A star)	Находит путь с наименьшей стоимостью от одной вершины к другой, используя алгоритм поиска по первому наилучшему совпадению на графе
Алгоритм Флойда-Уоршелла	Находит кратчайшие пути между всеми вершинами взвешенного ориентированного графа
Алгоритм Джонсона	Находит кратчайшие пути между всеми парами вершин взвешенного ориентированного графа (должны отсутствовать циклы с отрицательным весом)
Алгоритм Ли (волновой алгоритм)	Находит путь между вершинами *s* и *t* графа, содержащий минимальное количество промежуточных вершин (трассировки электрических соединений на кристаллах микросхем и на печатных платах)
Алгоритмы Viterbi, Cherkassky, …	

Алгоритм Дейкстры

- **Алгоритм Дейкстры** (Dijkstra's algorithm, 1959) – алгоритм поиска кратчайшего пути в графе из заданной вершины во все остальные (single-source shortest path problem)
- Находит кратчайшее *расстояние* от одной из вершин графа до всех остальных
- Применим только для графов без ребер отрицательного веса и петель ($w_{ij} \geq 0$)

- **Эдсгер Дейкстра** (Edsger Wybe Dijkstra) – нидерландский ученый (структурное программирование, язык Алгол, семафоры, распределенные вычисления)
- Лауреат премии Тьюринга (ACM A.M. Turing Award)

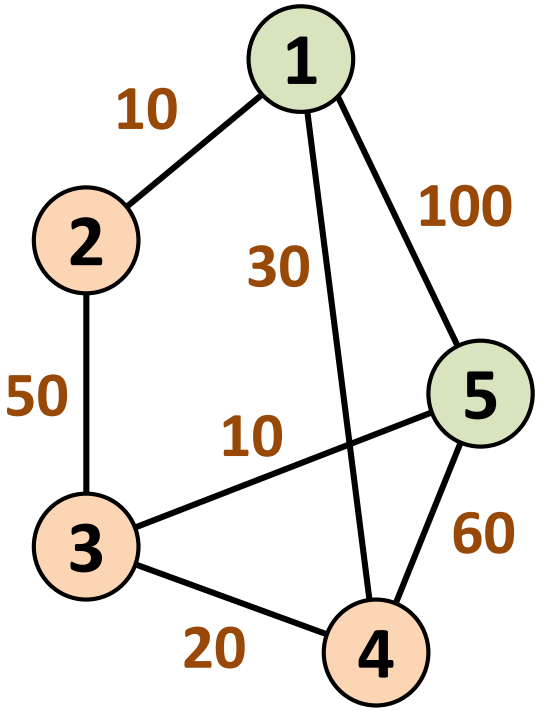


1. Дейкстра Э. Дисциплина программирования = A discipline of programming. — М.: Мир, 1978. — С. 275.
2. Дал У., Дейкстра Э., Хоор К. Структурное программирование = Structured Programming. — М.: Мир, 1975. — С. 247.

Алгоритм Дейкстры (Dijkstra)

- **Пример:** найти кратчайший путь из вершины 1 в вершину 5

- Введем обозначения:
  - *H* – множество посещенных вершин
  - *D*[*i*] – текущее известное кратчайшее расстояние от вершины *s* до вершины *i*
  - prev[*i*] – номер вершины, предшествующей *i* в пути

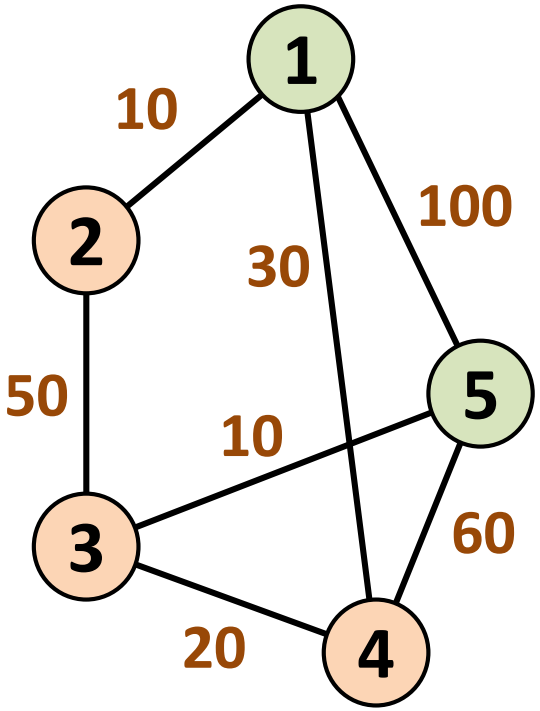


Алгоритм Дейкстры (Dijkstra)

1. Устанавливаем расстояние $D[i]$ от начальной вершины s до всех остальных в ∞

2. Полагаем $D[s] = 0$

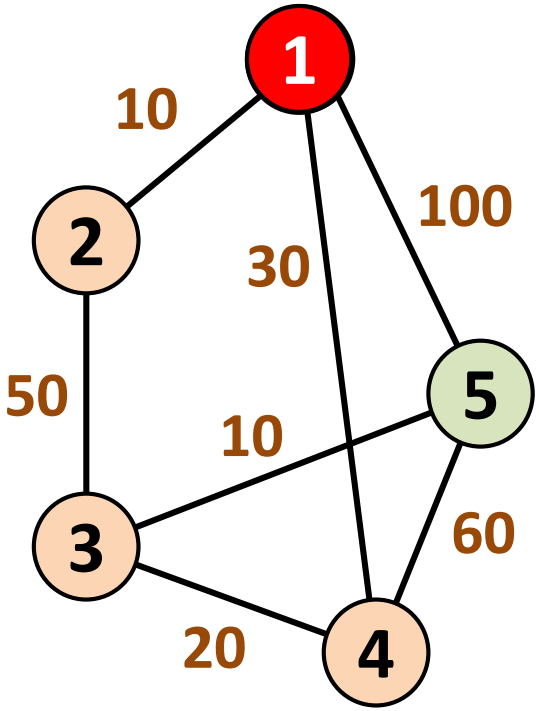
3. Помещаем все вершины в очередь с приоритетом Q (min-heap): приоритет вершины i это значение $D[i]$



	1	2	3	4	5
$D[i]$	0	∞	∞	∞	∞

Алгоритм Дейкстры (Dijkstra)

4. Запускаем цикл из *n* итераций (по числу вершин)
   1. Извлекаем из очереди *Q* вершину *v* с минимальным приоритетом – ближайшую к *s* вершину
   2. Отмечаем вершину *v* как посещенную (помещаем *v* во множество *H*)
   3. Возможно пути из *s* через вершину *v* стали короче, выполняем проверку: для каждой вершины *u* смежной с вершиной *v* и не включенной в *H* проверяем и корректируем расстояние *D*[*u*]



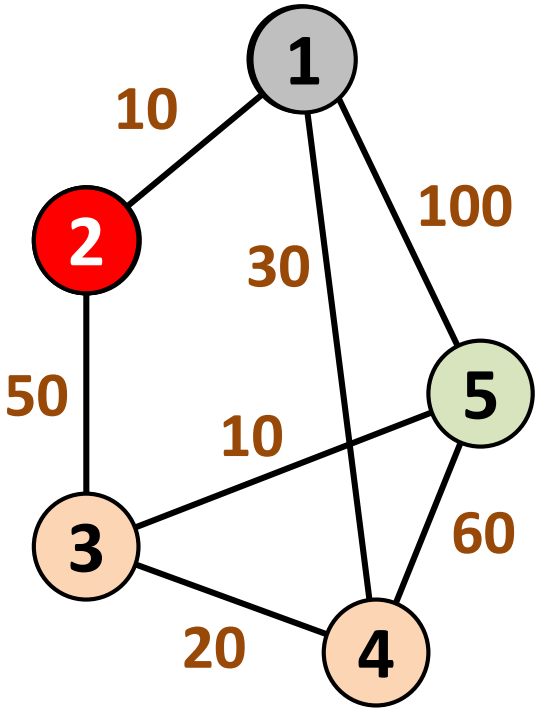

```
if D[v] + w(v, u) < D[u] then
    // Путь из s до u через (v, u) короче
    D[u] = D[v] + w(v, u)
    PrioQueueDecrease(Q, u, D[u])
    prev[u] = v
end if
```

D[2] = 10
D[4] = 30
D[5] = 100

D[i]	0	10	∞	30	100

Алгоритм Дейкстры (Dijkstra)

4. Запускаем цикл из *n* итераций (по числу вершин)
   1. Извлекаем из очереди *Q* вершину *v* с минимальным приоритетом – ближайшую к *s* вершину
   2. Отмечаем вершину *v* как посещенную (помещаем *v* во множество *H*)
   3. Возможно пути из *s* через вершину *v* стали короче, выполняем проверку: для каждой вершины *u* смежной с вершиной *v* и не включенной в *H* проверяем и корректируем расстояние *D*[*u*]



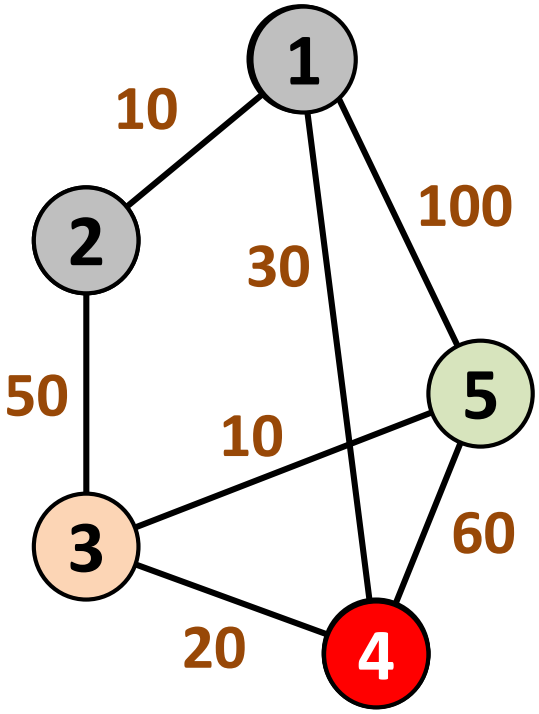
***D*[3] = 60**

```
if D[v] + w(v, u) < D[u] then
    // Путь из s до u через (v, u) короче
    D[u] = D[v] + w(v, u)
    PrioQueueDecrease(Q, u, D[u])
    prev[u] = v
end if
```

D[*i*]	0	10	60	30	100

Алгоритм Дейкстры (Dijkstra)

4. Запускаем цикл из *n* итераций (по числу вершин)
   1. Извлекаем из очереди *Q* вершину *v* с минимальным приоритетом – ближайшую к *s* вершину
   2. Отмечаем вершину *v* как посещенную (помещаем *v* во множество *H*)
   3. Возможно пути из *s* через вершину *v* стали короче, выполняем проверку: для каждой вершины *u* смежной с вершиной *v* и не включенной в *H* проверяем и корректируем расстояние *D*[*u*]



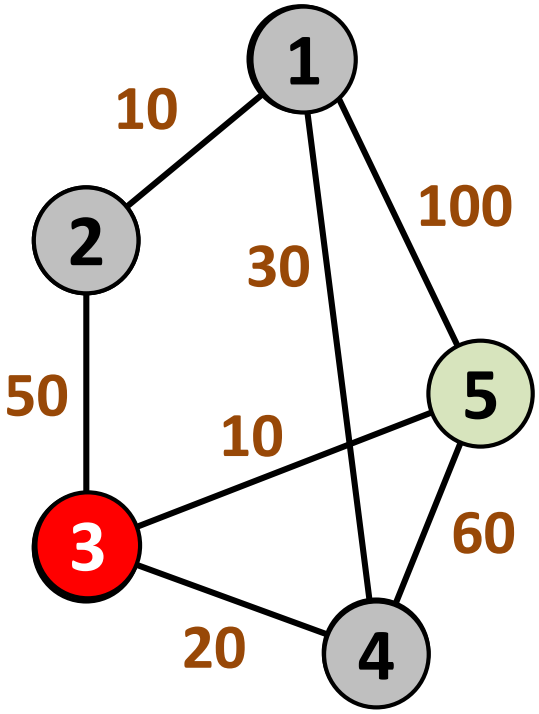
D[3] = 50
D[5] = 90

```
if D[v] + w(v, u) < D[u] then
    // Путь из s до u через (v, u) короче
    D[u] = D[v] + w(v, u)
    PrioQueueDecrease(Q, u, D[u])
    prev[u] = v
end if
```

D[i]	0	10	50	30	90

Алгоритм Дейкстры (Dijkstra)

4. Запускаем цикл из *n* итераций (по числу вершин)
   1. Извлекаем из очереди *Q* вершину *v* с минимальным приоритетом – ближайшую к *s* вершину
   2. Отмечаем вершину *v* как посещенную (помещаем *v* во множество *H*)
   3. Возможно пути из *s* через вершину *v* стали короче, выполняем проверку: для каждой вершины *u* смежной с вершиной *v* и не включенной в *H* проверяем и корректируем расстояние *D*[*u*]



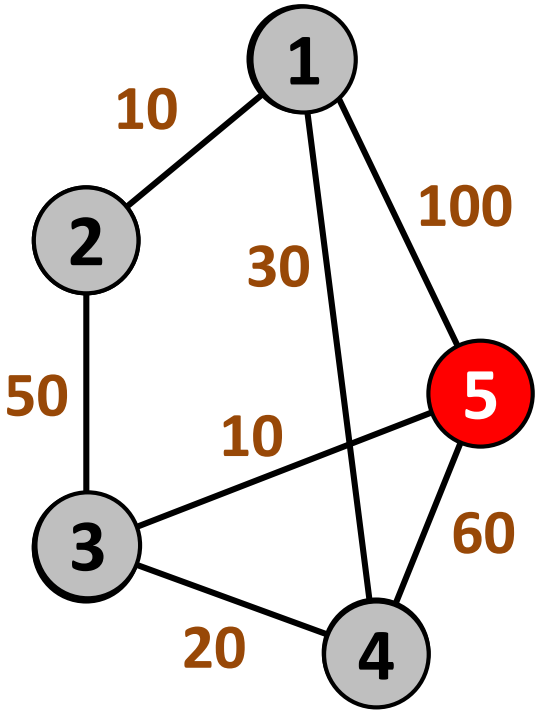
***D*[5] = 60**

```
if D[v] + w(v, u) < D[u] then
    // Путь из s до u через (v, u) короче
    D[u] = D[v] + w(v, u)
    PrioQueueDecrease(Q, u, D[u])
    prev[u] = v
end if
```

D[*i*]	0	10	50	30	60

Алгоритм Дейкстры (Dijkstra)

4. Запускаем цикл из *n* итераций (по числу вершин)
   1. Извлекаем из очереди *Q* вершину *v* с минимальным приоритетом – ближайшую к *s* вершину
   2. Отмечаем вершину *v* как посещенную (помещаем *v* во множество *H*)
   3. Возможно пути из *s* через вершину *v* стали короче, выполняем проверку: для каждой вершины *u* смежной с вершиной *v* и не включенной в *H* проверяем и корректируем расстояние *D*[*u*]

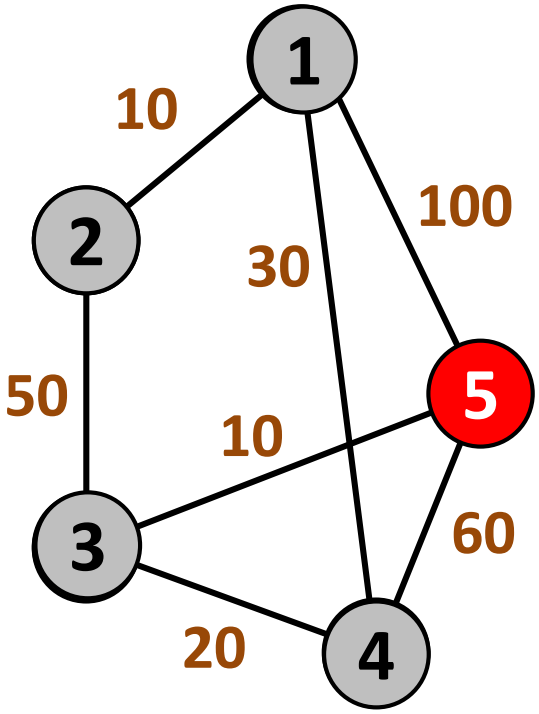



```
if D[v] + w(v, u) < D[u] then
    // Путь из s до u через (v, u) короче
    D[u] = D[v] + w(v, u)
    PrioQueueDecrease(Q, u, D[u])
    prev[u] = v
end if
```

D[*i*]	0	10	50	30	60

Алгоритм Дейкстры (Dijkstra)

- В массиве D[1:*n*] содержатся длины кратчайших путей из начальной вершины *s* = 1
  - *D*[1] – длина пути из 1 в 1
  - *D*[2] – длина пути из 1 в 2
  - *D*[3] – длина пути из 1 в 3
  - *D*[4] – длина пути из 1 в 4
  - *D*[5] – длина пути из 1 в 5



***D*[*i*]**	**0**	**10**	**50**	**30**	**60**

- **Как определить какие *вершины* входят в кратчайший путь из *s* = 1 в *d* = 5?**
- **Как восстановить путь?**

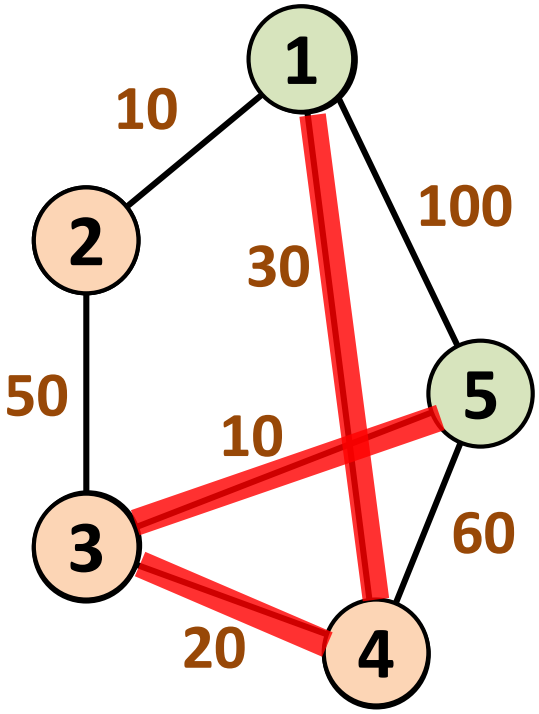
Алгоритм Дейкстры (Dijkstra)

- **Восстановление кратчайшего пути**
- Массив prev[*i*] содержит номер вершины, предшествующей *i* в пути

	1	2	3	4	5
prev[*i*]	-1	1	4	1	3

- **Восстанавливаем путь с конца**
  - Вершина 5
  - Вершина prev[5] = 3
  - Вершина prev[3] = 4
  - Вершина prev[4] = 1

Кратчайший путь (1, 4, 3, 5)



D[*i*]	0	10	50	30	60

Алгоритм Дейкстры (Dijkstra)

```
function ShortestPath_Dijkstra(G, src, d, prev)
    // Input: G = (V, E), src, dst
    // Output: d[1:n], prev[1:n]
    //   prev[i] - узел, предшествующий i в пути

    // Помещаем вершины в очередь с приоритетом
    for each i in V \ {src} do
        d[i] = Infinity
        prev[i] = -1
        PriorityQueueInsert(Q, i, d[i])
    end for

    d[src] = 0
    prev[src] = -1
    PriorityQueueInsert(Q, src, d[src])
```

Алгоритм Дейкстры (Dijkstra)

```
    for i = 0 to n – 1 do
        // Извлекаем узел ближайший к начальному
        v = PriorityQueueRemoveMin(Q)
        // Отмечаем v как посещенный
        H = H + {v}

        // Цикл по смежным вершинам узла v
        for each u in Adj(v) \ H do
            // Путь через u короче текущего пути?
            if d[v] + w(v, u) < d[u] then
                d[u] = d[v] + w(v, u)
                PriorityQueueDecrease(Q, u, d[u])
                prev[u] = v
            end if
        end for
    end for
end function
```

Восстановление кратчайшего пути

```
function SearchShortestPath(G, src, dst)

    ShortestPath_Dijkstra(G, src, d, prev)

    // Восстановление пути из src в dst
    i = dst
    pathlen = 1
    while i != src do
        pathlen = pathlen + 1
        i = prev[i]
    end while

    j = 0
    i = dst
    while i != s do
        path[pathlen – j] = i
        i = prev[i]
        j = j + 1
    end while
    return path[], pathlen
end function
```

$$T = T_{Dijikstra} + O(|V|)$$

Вычислительная сложность алгоритм Дейкстры

- Вычислительная сложность алгоритма Дейкстры определяется следующими факторами:

  1) выбором структуры данных для хранения графа (матрица смежности, списки смежных вершин)

  2) способом поиска вершины с минимальным расстоянием D[i]:

     - Очередь с приоритетом:
       Binary heap – $O(\log n)$, Fibonacchi heap, …
     - Сбалансированное дерево поиска:
       Red-black tree – $O(\log n)$, AVL-tree, …
     - Линейный поиск – $O(n)$

Алгоритм Дейкстры (Dijkstra)

```
function ShortestPath_Dijkstra(G, src, d, prev)
    // Input: G = (V, E), src, dst
    // Output: d[1:n], prev[1:n]
    //   prev[i] - узел, предшествующий i в пути

    // Помещаем вершины в очередь с приоритетом
    for each i in V \ {src} do
        d[i] = Infinity
        prev[i] = -1
        PriorityQueueInsert(Q, i, d[i])
    end for

    d[src] = 0
    prev[src] = -1
    PriorityQueueInsert(Q, src, d[src])
```

BinaryHeap

$O(n \log n)$

$O(\log n)$

Алгоритм Дейкстры (Dijkstra)

BinaryHeap

```
for i = 0 to n – 1 do
    // Извлекаем узел ближайший к начальному
    v = PriorityQueueRemoveMin(Q)          O(log n)
    // Отмечаем v как посещенный
    H = H + {v}

    // Цикл по смежным вершинам узла v
    for each u in Adj(v) \ H do
        // Путь через u короче текущего пути?
        if d[v] + w(v, u) < d[u] then
            d[u] = d[v] + w(v, u)
            PriorityQueueDecrease(Q, u, d[u])   O(log n)
            prev[u] = v
```

- В худшем случае функция PriorityQueueRemoveMin() вызывается *n* раз, суммарная сложность $O(n \log n)$
- В худшем случае функция PriorityQueueDecrease() вызывается для каждого из *m* ребер графа, суммарная сложность $O(m \log n)$

Вычислительная сложность алгоритм Дейкстры

- **Вариант 1.** *D*[i] – это массив или список (поиск за время *O*(*n*))

$$T_{Dijikstra} = O(n^2 + m) = O(|V|^2 + |E|)$$

- **Вариант 2.** *D*[i] хранятся в бинарной куче (Binary heap)

$$T_{Dijikstra} = O(n \log n + m \log n) = O(m \log n)$$

- **Вариант 3.** *D*[i] хранятся в Фибоначчиевой куче (Fibonacci heap)

$$T_{Dijikstra} = O(m + n \log n)$$

- **Вариант 4. …**

- В ориентированных ациклических графах (Directed acyclic graph) кратчайший путь можно найти за время *O*(*n*)

Разреженные и насыщенные графы

Вариант реализации алгоритма Дейкстры	**Насыщенный граф** $m = O(n^2)$	**Разреженный граф** $m = O(n)$
Вариант 1 *D*[i] – это массив (поиск за время *O*(*n*))	$T = O(n^2 + m) = \boldsymbol{O(n^2)}$	$T = O(n^2 + m) = \boldsymbol{O(n^2)}$
Вариант 2 *D*[i] хранятся в бинарной куче	$T = O(n \log n + m \log n) = \boldsymbol{O(n^2 \log n)}$	$T = O(n \log n + m \log n) = \boldsymbol{O(n \log n)}$
Вариант 3 *D*[i] хранятся в Фибоначчиевой куче	$T = O(m + n \log n) = \boldsymbol{O(n^2)}$	$T = O(n + n \log n) = \boldsymbol{O(n \log n)}$

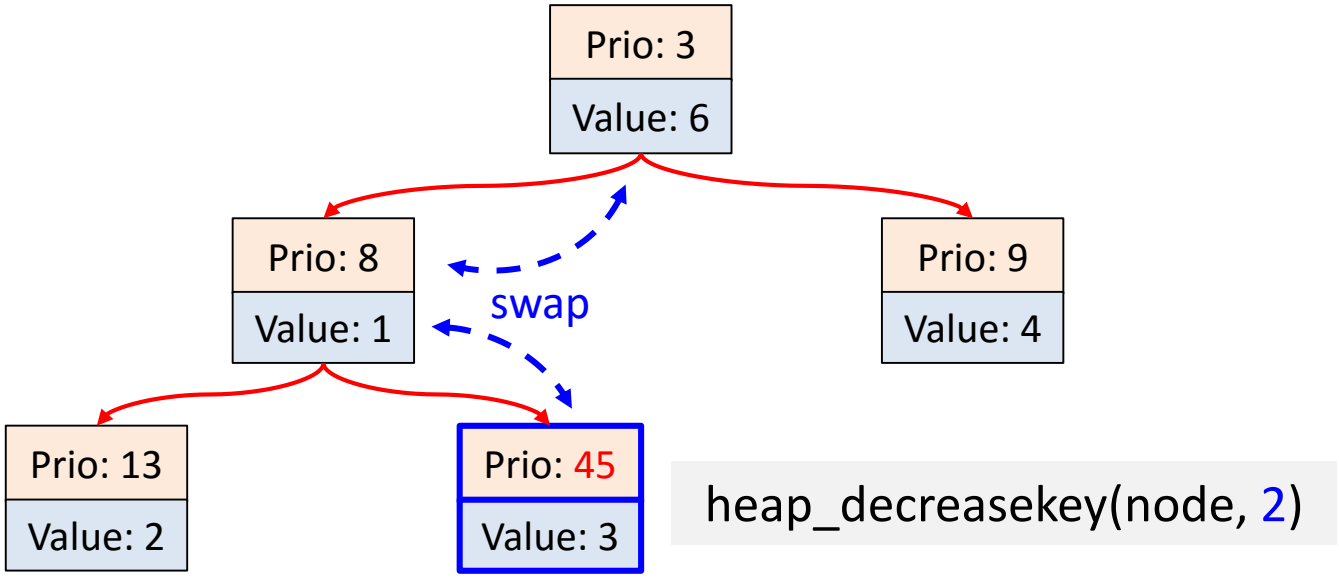
Алгоритм Дейкстры + бинарная куча

- **Необходимые операции над очередью с приоритетом**
  - `int heap_insert(struct heap *h, int key, int value)`
  - `int heap_removemin(struct heap *h)`
  - `void heap_decreasekey(struct heap *node, int key)`

Алгоритм Дейкстры + бинарная куча

- `void` **`heap_decreasekey`**`(struct heap *node, int key)`

- Изменяем у узла node приоритет на priority
- Восстанавливаем свойства кучи – поднимаем элемент вверх по дереву (min-heap)



Домашнее задание + чтение

- Оценить трудоемкость по памяти алгоритма Дейкстры в следующих случаях:
  - при использовании матрицы смежности и двоичной кучи;
  - при использовании списков смежности и двоичной кучи
- Описание алгоритма Дейкстры в [CLRS, C. 696]